Cours de Recherche Opérationnelle

Année 2002 - 2003

THEORIE DES GRAPHES

I. Définition & vocabulaire

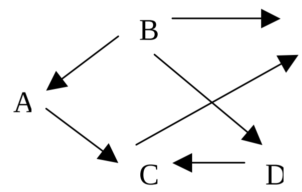
1. Définition

Un graphe est définit comme un ensemble de sommets (ou objets) reliés entre eux.

Extrémité = Variable

Terminaison = valeur

ι (A) = {B, C}
ι (B) = {E, D}
ι (C) = {E}
ι (D) = {C}
ι (E) = ∅



Il existe l'application interne :
ι (A) = ∅
ι (B) = {A}
…..

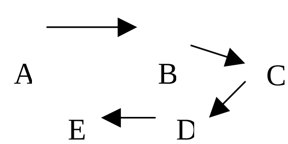
Mathématiquement un graphe G est complément défini :
- si on connaît l'ensemble des sommes X = {A, B, C, D, E}
- si on connaît l'application ι

donc G = {X, ι}

U = { (A,B), (A,C), (B,E), (C,E), (B,D), (D,C) } = ensemble des arcs

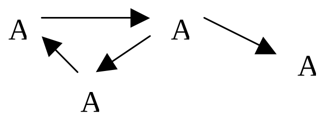
2. Vocabulaire

- arcs : A **à** B A pas d'arcs B A ⇒ B
  Notation (A, B) ou A **à** B ou AB



- sommet adjacents : deux sommets reliées par un arc
- chemin Hamiltonien : un chemin qui passe une fois et une seule fois par tous les sommets (et qui comprend l'ensemble des sommets)
- chemin simple : un chemin qui passe qu'une et une seule fois sur un arc
- chemin élémentaire : un chemin qui passe qu'une et une seule fois par les sommets qu'il utilise

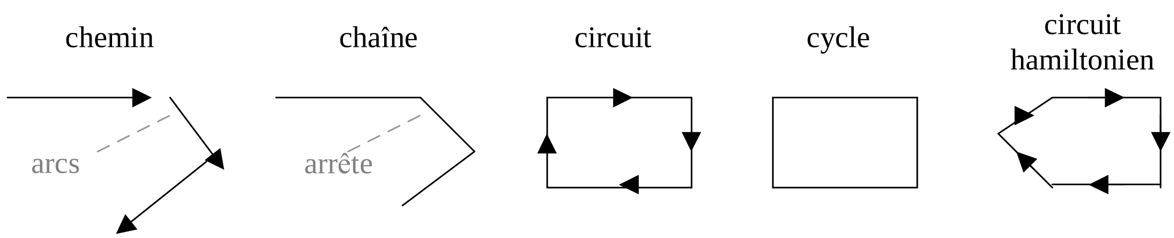
- circuit : un chemin qui se referme sur lui-même



(A, B, D) est un circuit

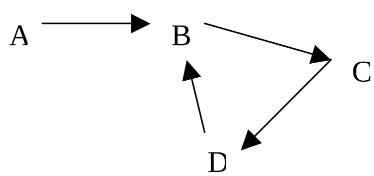
- arête : arc non orienté A – B

- chaîne : succession d'arêtes successives.



- matrice associées : un graphe peut être défini par sa matrice associée.
  2 formes :
    - Ø forme booléenne
    - Ø forme explicite (matrice ou arcs)

3. Exemples



Forme Matrice Booléenne :

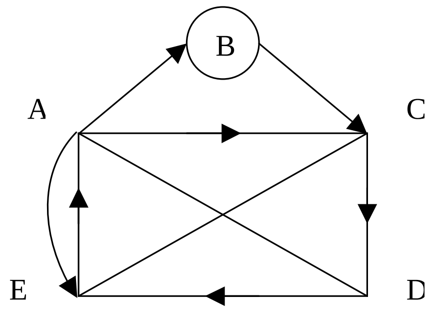
ä	**A**	**B**	**C**	**D**
A	0	1	0	0
B	0	0	1	0
C	0	0	0	1
D	0	1	0	0

Forme Matrice en arcs :

ä	**A**	**B**	**C**	**D**
A		AB		
B			BC	
C				CD
D		DB		

II. Exercices

1. Graphe 1



GRAPHE 1

1. {D, A, E, A, E, A} est-il un chemin simple ?
   non car on passe plusieurs fois par le même chemin

2. {D, A, E, A} est-il un chemin élémentaire ?
   non car il passe deux fois par le sommet A

3. {D, A, E} est-il un chemin élémentaire ?
   oui

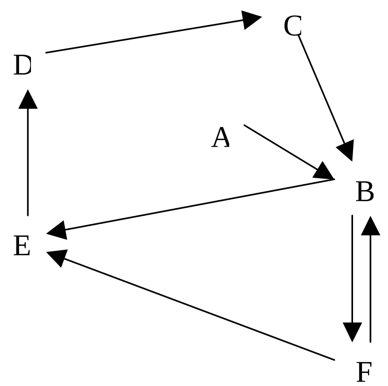
4. Donner la matrice aux arcs

ä	A	B	C	D	E
A		AB	AC		AE
B		BB	BC		
C				CD	
D	DA				DE
E	EA		EC		

5. Donner la matrice booléenne

ä	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	1
B	0	1	1	0	0
C	0	0	0	1	0
D	1	0	0	0	1
E	1	0	1	0	0

2. Graphe 2



GRAPHE 2

Dictionnaire des précédents : (graphe 2)

X	Prec(X)
A	
B	A,C,F
C	D
D	E
E	F,B
F	B

Dictionnaire des suivants : (graphe 2)

X	Prec(X)
A	B
B	E,F
C	B
D	C
E	D
F	B,E

Chemin de longueur B – taille 1 : (graphe 1)

ä	A	B	C	D	E
A		AB	AC		AE
B		BB	BC		
C				CD	
D	DA				DE
E	EA		EC		

A

Chemin de taille 2 – 2 arcs : (graphe 1)

ä	A	B	C	D	E
A	AEA	ABB	ABC AEC	ACD	
B		BBB	BBC	BCD	
C	CDA				CDE
D	DEA	DAB	DAC DEC		DAE
E		EAB	EAC	ECD	EAE

A^2

Chemin de taille 3 : (graphe 1)

ä	A	B	C	D	E
A	ACDA	AEAB ABBB	AEAC ABBC	ABCD AECD	ACDE
B		BBBB			BCDE
C					
D					
E					

A^3

Chemin de taille 4 : (graphe 1)

ä	A	B	C	D	E
A	ABCDA AECDA AEAEA ACDEA	ACDAB AEABB ABBBB	ACDAC AEABC ABBBC AEAEC ACDEC	AEACD ABBCD	ACDAE ABCDE AECDE
B	BBCDA BCDEA	BCDAB BBBBB	BCDAC BBBBC BCDEC	BBBCD	BCDAE BBCDE
C	CDAEA	CDEAB CDABB	CDEAC CDABC CDAEC	CDACD CDECD	CDACE
D	DACDA DECDA DEAEA	DAEAB DEABB DAEBB	DAEAC DEABC DAEBC DEAEC	DEACD DABCD DAECD	DAEAE DACDE DECDE
E	EACDA ECDEA	ECDAB EAEAB EABBB	ECDAC EAEAC ECDEC	EABCD EAECD	ECDAE EAEAE EACDE

A^4

Cette méthode est lourde.
Si on recherche les chemins Hamiltonien, il est préférable :

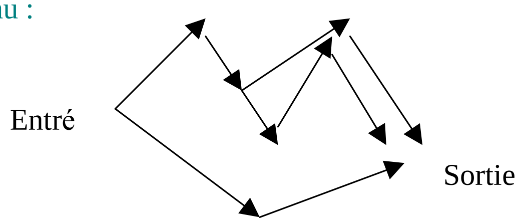
1. d'enlever les doublons
2. d'enlever les circuits

Les deux schémas représentent le même graphe : sur les deux circuits, on voit qu'il ne peut pas y avoir de chemin hamiltonien.

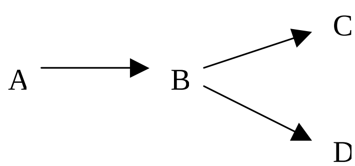
III. Les graphes réseaux

1. Définitions

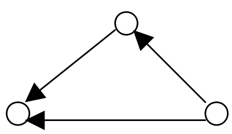
Graphe réseau :



Lien de précédence :



Circuit :



Graphe valués :

$A \xrightarrow{10} B \xrightarrow{15} C$ Réseaux de

Arborescence :

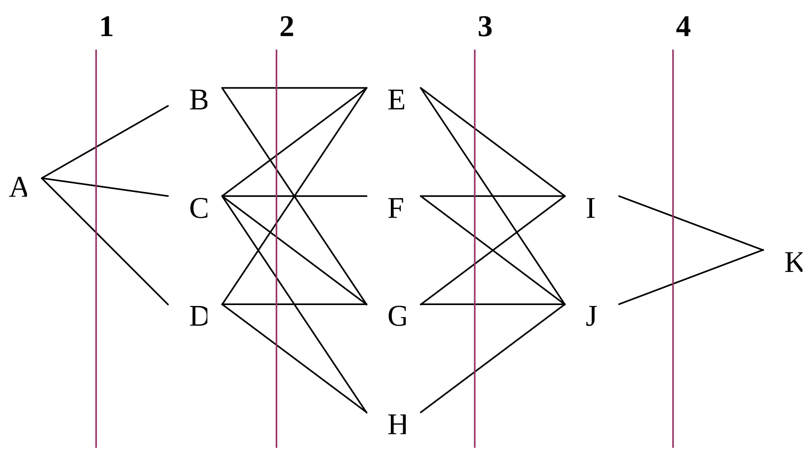
		ä	
	ä	æ	ä
ä			æ
æ	ä		ä
	æ	ä	æ
		æ	

Programmation dynamique certain :
Toute partie d'un chemin optimal (par référence à un critère d'optimisation est elle-même optimale)

2. Exemples

a. Exemple 1

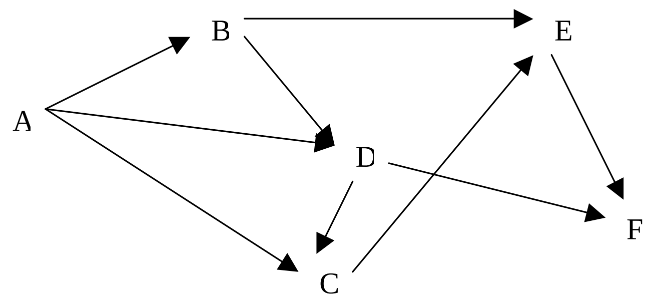
On doit construire une route entre A et K en passent par des villes intermédiaires selon les phases de constructions.
Les arcs sont valuées par le coût total correspondant à ces arcs.
Choisir le meilleur tracé possible pour maintenir les coûts totaux.



CHEMIN LE PLUS COURT = **ADGIK**

1	2	3	4
AB = 8	BE = 3	EI = 4	IK = 5
AC = 5	BG = 4	EJ = 5	JK = 7
AD = 7	CE = 5	FI = 4	
	CF = 4	FJ = 4	
	CG = 6	GI = 3	
	CH = 4	GJ = 2	
	DE = 3	HJ = 4	
	DG = 2		
	DH = 3		

b. Exemple 2



LE PLUS COURT = **ABDCEF** (10)
LE PLUS LONG = **ADF** (13)

AB = 3	BE = 6	DF = 7
AD = 6	CE = 1	DC = 2
AC = 8	EF = 2	BD = 2

Algorithme de FORD : pour recherche la valeur maximale

Etape 1 : numéroter les sommets d'une façon quelconque sauf le sommet initiale X_0 et le sommet final X_{n-1} (n = nombre de sommet)

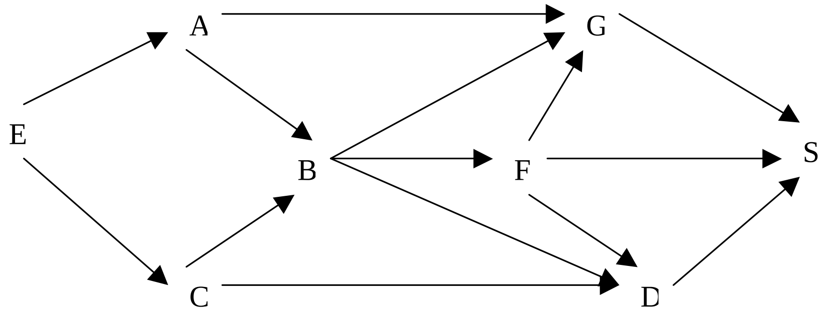
Etape 2 : afficher des valeurs λi à chacun des sommets $\lambda i > 0$ ($1 \leq \lambda \leq n$)

Etape 3 : pour tout sommet Xj calculer $\varepsilon ji = \lambda j - \lambda i$
si $\varepsilon ji <$ valuation arc (Xi, Xj) alors λi est remplacé par $\lambda i = \lambda i + \mu(xi, xj)$
sinon λi est inchangé.

Etape 4 : on continue les itérations (étape 3) jusqu'à ce qu'on puisse plus augmenter.

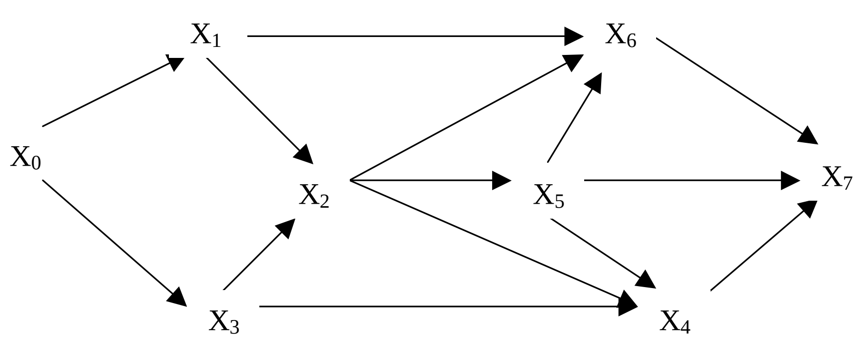
c. Exemple 3

Trouver le chemin le plus long entre E et S



EA = 12	AG = 24	GS = 21
EC = 14	AB = 13	FG = 5
	BG = 3	FS = 2
	BF = 7	FD = 4
	BD = 1	DS = 26
	CB = 10	
	CD = 16	

1° étape :



3° étape :

X_0 $\Rightarrow$ (X_0, X_1) et (X_0, X_3) sont les arcs qui partent de X_0

(X_0, X_1) : $\varepsilon_{10} = \lambda_1 - \lambda_0 = 0 - 0 = 0$

$\gamma(X_0, X_1) = 12$

$\varepsilon_{10} < \gamma(X_0, X_1)$? oui alors $\lambda'_1 = \lambda_0 + \gamma(X_0, X_1) = 0 + 12 = 12$

$\lambda_1 = 12$

(X_0, X_3) : $\varepsilon_{30} = \lambda_3 - \lambda_0 = 0 - 0 = 0$

$\gamma(X_0, X_3) = 14$

$\varepsilon_{30} < \gamma(X_0, X_3)$? oui alors $\lambda'_3 = \lambda_0 + \gamma(X_0, X_3) = 0 + 14 = 14$

$\lambda_3 = 14$

X_1 $\Rightarrow$ (X_1, X_6) et (X_1, X_2) sont les arcs qui partent de X_1

(X_1, X_6) : $\varepsilon_{61} = \lambda_6 - \lambda_1 = 0 - 12 = -12$
$\gamma(X_1, X_6) = 24$
$\varepsilon_{61} < \gamma(X_1, X_6)$? oui alors $\lambda'_6 = \lambda_1 + \gamma(X_1, X_6) = 12 + 24 = 36$
$\lambda_6 = 36$

(X_1, X_2) : $\varepsilon_{21} = \lambda_2 - \lambda_1 = 0 - 12 = -12$
$\gamma(X_1, X_2) = 13$
$\varepsilon_{21} < \gamma(X_1, X_2)$? oui alors $\lambda'_2 = \lambda_1 + \gamma(X_1, X_2) = 12 + 13 = 25$
$\lambda_2 = 25$

X_2 $\Rightarrow$ (X_2, X_6) et (X_2, X_5) et (X_2, X_4) sont les arcs qui partent de X_2

(X_2, X_6) : $\varepsilon_{62} = \lambda_6 - \lambda_2 = 36 - 25 = 11$
$\gamma(X_2, X_6) = 3$
$\varepsilon_{62} < \gamma(X_2, X_6)$? non

(X_2, X_5) : $\varepsilon_{52} = \lambda_5 - \lambda_2 = 0 - 25 = -25$
$\gamma(X_2, X_5) = 7$
$\varepsilon_{52} < \gamma(X_2, X_5)$? oui alors $\lambda'_5 = \lambda_2 + \gamma(X_2, X_5) = 25 + 7 = 32$
$\lambda_5 = 32$

(X_2, X_4) : $\varepsilon_{42} = \lambda_4 - \lambda_2 = 0 - 25 = -25$
$\gamma(X_2, X_4) = 1$
$\varepsilon_{42} < \gamma(X_2, X_4)$? oui alors $\lambda'_4 = \lambda_2 + \gamma(X_2, X_4) = 25 + 1 = 26$
$\lambda_4 = 26$

X_3 $\Rightarrow$ (X_3, X_2) et (X_3, X_4) sont les arcs qui partent de X_3

(X_3, X_2) : $\varepsilon_{23} = \lambda_2 - \lambda_3 = 25 - 14 = 11$
$\gamma(X_3, X_2) = 10$
$\varepsilon_{23} < \gamma(X_3, X_2)$? non

(X_3, X_4) : $\varepsilon_{43} = \lambda_4 - \lambda_3 = 26 - 14 = 12$
$\gamma(X_3, X_4) = 16$
$\varepsilon_{43} < \gamma(X_3, X_4)$? oui alors $\lambda'_4 = \lambda_3 + \gamma(X_3, X_4) = 14 + 16 = 30$
$\lambda_4 = 30$

X_4 $\Rightarrow$ (X_4, X_7) est l'arc qui part de X_4

(X_4, X_7) : $\varepsilon_{74} = \lambda_7 - \lambda_4 = 0 - 30 = -30$
$\gamma(X_4, X_7) = 26$
$\varepsilon_{74} < \gamma(X_4, X_7)$? oui alors $\lambda'_7 = \lambda_4 + \gamma(X_4, X_7) = 30 + 26 = 56$
$\lambda_7 = 56$

X_5 $\Rightarrow$ (X_5, X_6) et (X_5, X_7) et (X_5, X_6) sont les arcs qui partent de X_5

(X_5, X_6) : $\varepsilon_{65} = \lambda_6 - \lambda_5 = 36 - 32 = 4$
$\gamma(X_5, X_6) = 5$
$\varepsilon_{65} < \gamma(X_5, X_6)$? oui alors $\lambda'_6 = \lambda_5 + \gamma(X_5, X_6) = 32 + 5 = 37$
$\lambda_6 = 37$

(X_5, X_7) : $\varepsilon_{75} = \lambda_7 - \lambda_5 = 56 – 32 = 24$
$\gamma (X_5, X_7) = 2$
$\varepsilon_{75} < \gamma (X_5, X_7)$? non

(X_5, X_4) : $\varepsilon_{45} = \lambda_4 - \lambda_5 = 26 – 30 = -2$
$\gamma (X_5, X_4) = 4$
$\varepsilon_{45} < \gamma (X_5, X_4)$? oui alors $\lambda'_4 = \lambda_5 + \gamma (X_5, X_4) = 32 + 4 = 36$
$\lambda_4 = 36$

X_6 $\Rightarrow$ (X_6, X_7) est l'arc qui part de X_6
(X_6, X_7) : $\varepsilon_{76} = \lambda_7 - \lambda_6 = 56 – 37 = 19$
$\gamma (X_6, X_7) = 21$
$\varepsilon_{76} < \gamma (X_6, X_7)$? oui alors $\lambda'_7 = \lambda_6 + \gamma (X_6, X_7) = 37 + 21 = 58$
$\lambda_7 = 58$

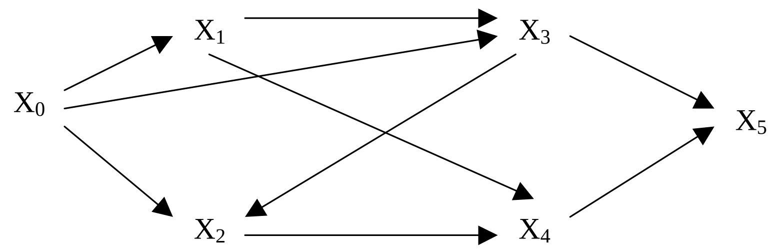
X_7 $\Rightarrow$ (X_4, X_7), (X_5, X_7), (X_6, X_7) sont les arcs qui arrivent de X_7
(X_4, X_7) : $\varepsilon_{74} = \lambda_7 - \lambda_4 = 58 - 36 = 22$
$\gamma (X_4, X_7) = 2$
$\varepsilon_{74} < \gamma (X_4, X_7)$? oui alors $\lambda'_7 = \lambda_4 + \gamma (X_4, X_7) = 36 + 26 = 62$
$\lambda_7 = 62$

(X_5, X_7) : $\varepsilon_{75} = \lambda_7 - \lambda_5 = 62 - 32 = 30$
$\gamma (X_5, X_7) = 2$
$\varepsilon_{75} < \gamma (X_5, X_7)$? non

(X_6, X_7) : $\varepsilon_{76} = \lambda_7 - \lambda_6 = 62 - 37 = 25$
$\gamma (X_6, X_7) = 21$
$\varepsilon_{76} < \gamma (X_6, X_7)$? non

La longueur maximale est de 62.

d. Exemple 4



$X_0X_1 = 3$	$X_1X_3 = 2$	$X_3X_2 = 2$
$X_0X_3 = 6$	$X_1X_4 = 6$	$X_3X_5 = 7$
$X_0X_2 = 8$	$X_2X_4 = 1$	$X_4X_5 = 2$

Le plus petit chemin :

X_1 (X_0, 3)
X_2 (X_0, 8) (X_3, 5+2=7)
X_3 (X_0, 6) (X_1, 3+2=5)
X_4 (X_1, 3+6=9) (X_2, 7+1=8)
X_5 (X_3, 5+7=12) (X_4, 8+2=10)

X_5 (X_4, 10)
X_4 (X_2, 8)
X_2 (X_3, 7)
X_3 (X_1, 5)
X_1 (X_0, 3)
X_0

Le plus petit chemin est X_0, X_1, X_3, X_2, X_4, X_5 de longueur minimal 33

Le plus grand chemin :

X_1 (X_0, 3)
X_2 (X_0, 8) (X_3, 6+2=8)
X_3 (X_0, 6) (X_1, 3+2=5)
X_4 (X_1, 3+6=9) (X_2, 8+1=9)
X_5 (X_3, 6+7=13) (X_4, 9+2=11)

X_5 (X_3, 13)
X_3 (X_0, 6)
X_0

Le plus grand chemin est X_5, X_3 de longueur minimal 19

Réseau = graphe → avec une entrée et une sortie
→ sans boucles

Chemin minimal :

i	j	(xi, xj) existe	(l_j - l_i) > g(xi, xj)	l_j	i > j ?	i ¬ j (j=0)	j ¬ j+1	j > n ?	fin	l_1 +¥	l_2 +¥	l_3 +¥	l_4 +¥	l_5 +¥
0	1	oui	oui	3	non		2	non		3				
0	2	oui	oui	8	non		3	non			8			
0	3	oui	oui	6	non		4	non				6		
0	4	non					5	non					+∞	
0	5	non					6	oui						+∞
1	1	non					2	non						
1	2	non					3	non						
1	3	oui	oui	5	non		4	non				5		
1	4	oui	oui	9	non		5	non					9	
1	5	non					6	oui						
2	1	non					2	non						
2	2	non					3	non						
2	3	non					4	non						
2	4	oui	oui	9	non		5	non					9	
2	5	non					6	oui						
3	1	non					2	non						
3	2	oui	oui	7	non		3	non			7			
3	3	non					4	non						
3	4	non					5	non						
3	5	oui	oui	12	non		6	oui						12
4	1	non					2	non						
4	2	non					3	non						
4	3	non					4	non						
4	4	non					5	non						
4	5	oui	oui	11			6	oui						12
5								oui						